Μάθημα 7ο 31/10/16

Καμπυλότητα για καμπύλες του $\mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο

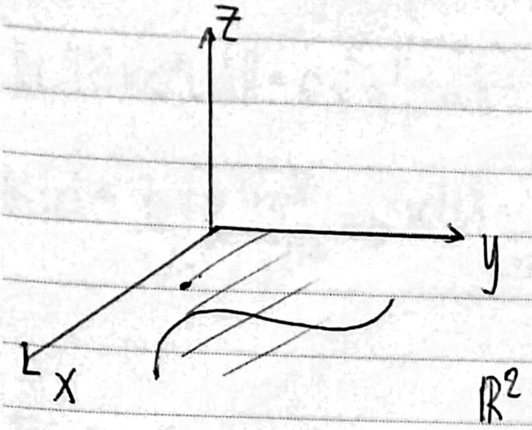
$\mathbb{R}^2$ $\kappa = \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle = \langle \ddot{c}, \vec{n} \rangle$ $\qquad \dot{c} = \vec{t}, \quad J\dot{c} = \vec{n}$

$\ddot{c} = \cancel{\langle \ddot{c}, \vec{t} \rangle \vec{t}} + \langle \ddot{c}, \vec{n} \rangle \vec{n}$

$\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 1 \Rightarrow \cancel{2}\langle \ddot{c}, \dot{c} \rangle = 0$

$\langle \ddot{c}, \vec{t} \rangle = 0.$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$. Καλούμε καμπυλότητα της c τη συνάρτηση $\kappa: I \to [0, +\infty)$, $\kappa(s) = \|\ddot{c}(s)\|$



$\mathbb{R}^2=\{(x,y,0)\,/\,x,y\in\mathbb{R}\}$.

ΕΡΩΤΗΜΑ: Ποιές είναι οι καμπύλες με $\kappa=0$;

$\kappa(s)=0\ \forall s\in I \Leftrightarrow \ddot{c}(s)=0\ \forall s\in I$, $\dot{c}(s)=v=$ σταθ. $\forall s\in I \Rightarrow c(s)=P_0+sv$, $\|v\|=$

Καμπυλότητα καμπυλών του $\mathbb{R}^3$ με τυχούσα παράμετρο

Έστω $c: I\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη με παράμετρο $t\in I$

$s=s(t)=\int_{t_0}^{t}\|c'(u)\|du \Rightarrow \dfrac{ds}{dt}=\|c'\|>0$

$\Rightarrow$ Η $s=s(t)$ αντιστρέφεται με λεία αντίστροφη $t=f(s)=t(s)$ και

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\frac{ds}{dt}} \Leftrightarrow \frac{dt}{ds}=\frac{1}{\|c'\|}$$

Η αναπαραμέτρηση της c με παράμετρο το μήκος είναι η καμπύλη $\bar{c}=c\circ f$

Σύμβαση: Από $\bar{c}(s)$ γράφουμε $c(s)=c(t(s))$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Καλούμε **καμπυλότητα** της c την συνάρτηση $\kappa: I\to[0,+\infty)$
$\kappa(t)=\kappa(t(s))$
αναπαραμ. καμπυλ. της $\bar{c}$

Υπολογισμός καμπυλότητας καμπύλης του $\mathbb{R}^3$ με τυχούσα παράμετρο

$\kappa=\|\ddot{c}\|$, $\langle\dot{c},\dot{c}\rangle=1 \Rightarrow 2\langle\ddot{c},\dot{c}\rangle=0$, $\|v\times w\|=\|v\|\|w\|\sin\sphericalangle(v,w)$

$$\|\dot{c}\times\ddot{c}\| = \underbrace{\|\dot{c}\|}_{1}\|\ddot{c}\| \sin\pi/2$$

$$K = \|\ddot{c}\| = \|\dot{c}\times\ddot{c}\|$$

$$\dot{c} = \frac{dc}{ds} = \frac{dt}{ds}\cdot\frac{dc}{dt} \Leftrightarrow \dot{c} = \frac{dt}{ds}c'$$

$$\ddot{c} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds}c'\right) = \frac{d^2t}{ds^2}c' + \frac{dt}{ds}\frac{dc'}{ds}$$

$$\ddot{c} = \frac{d^2t}{ds^2}c' + \frac{dt}{ds}\cdot\frac{dt}{ds}\cdot\frac{dc'}{dt}$$

$$\ddot{c} = \frac{d^2t}{ds^2}c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\cdot c''$$

$$K = \|\dot{c}\times\ddot{c}\| = \left\|\frac{dt}{ds}c'\times\left(\frac{d^2t}{ds^2}c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 c''\right)\right\| = \left\|\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 c'\times c''\right\| \xrightarrow{\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\|c'\|}}$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{\|c'\times c''\|}{\|c'\|^3}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Θεωρώ την καμπύλη $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ με $c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ $a>0$, $b\in\mathbb{R}$ (κυλινδρικές έλικες $b\neq0$)

ΛΥΣΗ: Είναι λεία με διάνυσμα ταχύτητας $c'(t) = (a\sin t, a\cos t, b) \neq (0,0,0)$.
Άρα, η c είναι κανονική.

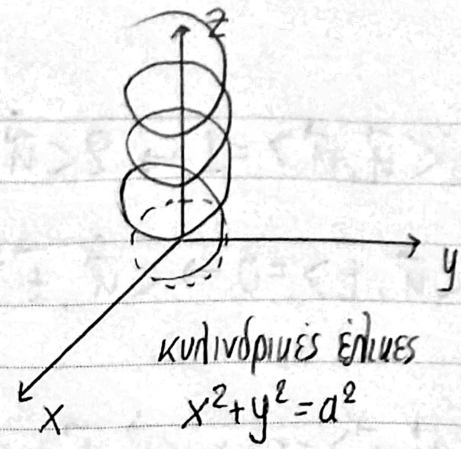
$$c''(t) = (a\cos t, -a\sin t, 0)$$

$$K(t) = \frac{\|c'(t)\times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3} = \frac{\|c'(t)\times c''(t)\|}{\sqrt{a^2+b^2}^3}$$

$$c'(t)\times c''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0\end{vmatrix} = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2) = a(b\sin t, -b\cos t, a)$$

$\|c'(t)\times c''(t)\| = a\sqrt{b^2+a^2}$

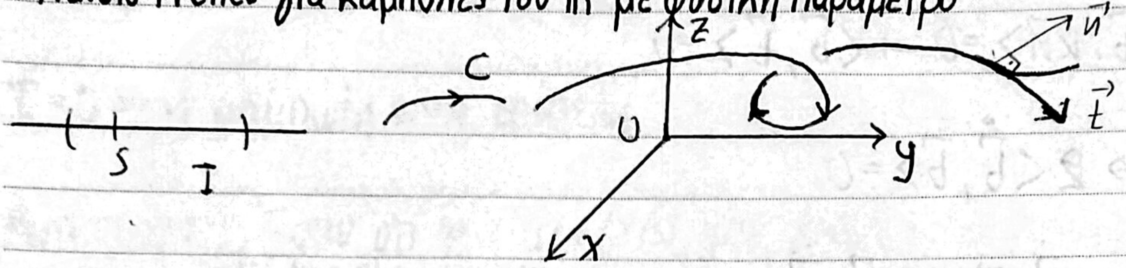
$$K(t) = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}^3} \Rightarrow \kappa(t) = \frac{a}{a^2+b^2}$$



κυλινδρικές έλικες

$x^2+y^2=a^2$

Πλαίσιο Frenet για καμπύλες του $\mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο



$\|\dot c\|=1$

Το μοναδιαίο εφαπτόμενο της c είναι το $\boxed{\vec t(s) = \dot c(s)}$

$\|\dot c\| = 1 \Leftrightarrow \langle \dot c,\dot c\rangle = 1 \Rightarrow \langle \ddot c, \dot c\rangle = 0 \Rightarrow \ddot c \perp \vec t$

$\boxed{\text{Υπόθεση}}$ Για $s\in I$, $\kappa(s)>0$

Ορίζω $\vec n = \dfrac{\ddot c}{\|\ddot c\|} = \dfrac{\ddot c}{\kappa}$ καλείται πρωτεύον κάθετο της c.

Το δεύτερο διάνυσμα είναι το $\vec b = \vec t\times\vec n$

$\forall s\in I$ $\{\vec t(s), \vec n(s), \vec b(s)\}$ είναι ορθομοναδιαία δεξιόστροφη βάση του $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{\vec t} = \cancel{\langle \dot{\vec t},\vec t\rangle \vec t} + \langle \dot{\vec t},\vec n\rangle \vec n + \cancel{\langle \dot{\vec t},\vec b\rangle \vec b} \Leftrightarrow \boxed{\dot{\vec t} = \kappa\vec n} \\ \dot{\vec n} = \langle \dot{\vec n},\vec t\rangle \vec t + \cancel{\langle \dot{\vec n},\vec n\rangle \vec n} + \langle \dot{\vec n},\vec b\rangle \vec b \Leftrightarrow \boxed{\dot{\vec n} = -\kappa\vec t + \langle \dot{\vec n},\vec b\rangle \vec b} \\ \dot{\vec b} = \cancel{\langle \dot{\vec b},\vec t\rangle \vec t} + \langle \dot{\vec b},\vec n\rangle \vec n + \cancel{\langle \dot{\vec b},\vec b\rangle \vec b} \Leftrightarrow \boxed{\dot{\vec b} = -\langle \dot{\vec n},\vec b\rangle \vec b} \end{cases}$$

$\langle \vec t,\vec t\rangle = 1 \Rightarrow 2\langle \dot{\vec t},\vec t\rangle = 0$

$\vec t = \dot c \Rightarrow \dot{\vec t} = \ddot c = \kappa\vec n$

$\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = 1 \Rightarrow 2\langle \dot{\vec{n}}, \vec{n} \rangle = 0$

$\langle \vec{n}, \vec{t} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{\vec{n}}, \vec{t} \rangle + \langle \vec{n}, \underset{\kappa\vec{n}}{\underset{\parallel}{\dot{\vec{t}}}} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{\vec{n}}, \vec{t} \rangle = -\kappa$

$\langle \vec{b}, \vec{t} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{\vec{b}}, \vec{t} \rangle + \langle \vec{b}, \dot{\vec{t}} \rangle = 0$

$\langle \dot{\vec{b}}, \vec{t} \rangle + \langle \vec{b}, \kappa\vec{n} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{\vec{b}}, \vec{t} \rangle = 0$

$\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = 1 \Rightarrow 2\langle \dot{\vec{b}}, \vec{b} \rangle = 0$

$\langle \vec{b}, \vec{n} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{\vec{b}}, \vec{n} \rangle + \langle \vec{b}, \dot{\vec{n}} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{\vec{b}}, \vec{n} \rangle = -\langle \dot{\vec{n}}, \vec{b} \rangle$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $C: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$ και καμπυλότητα $\kappa(s) > 0$ $\forall s \in I$. Η συνάρτηση $\tau: I \to \mathbb{R}$ με $\tau(s) = \langle \dot{\vec{n}}(s), \vec{b}(s) \rangle$ καλείται στρέψη της C.

Επομένως, οι <u>εξισώσεις Frenet</u>: $\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{t}} = \kappa\vec{n} \\ \dot{\vec{n}} = -\kappa\vec{t} + \tau\vec{b} \\ \dot{\vec{b}} = -\tau\vec{n} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1^{\eta}) \\ (2^{\eta}) \\ (3^{\eta}) \end{array}$

$\Updownarrow$

Μπορούμε να γράψουμε: $\begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$

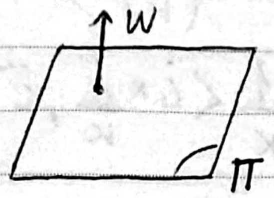
Έστω ότι η $C(s)$ έχει στρέψη $\tau = 0$.

$\dot{\vec{b}} = -\tau \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{b}(s) = w =$ σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα

Θεωρώ την συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$ με $f(s) = \langle C(s), w \rangle$,
$\dot{f}(s) = \langle \dot{C}(s), w \rangle + \langle C(s), \dot{w} \rangle = \langle \vec{t}(s), \vec{b}(s) \rangle = 0 \Rightarrow f = a_0 =$ σταθερά

$w = (A, B, \Gamma)$, $C(s) = (x(s), y(s), z(s))$.

$f(s)=a_0 \Leftrightarrow AX(s)+By(s)+\Gamma Z(s)=a_0, \quad \forall s\in I$

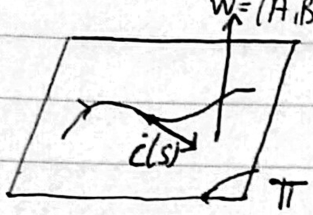


π: $Ax+By+\Gamma z=a_0$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ καλείται **επίπεδη** αν η εικόνα της περιέχεται σε κάποιο επίπεδο του $\mathbb{R}^3$.

$\tau=0 \Rightarrow$ η καμπύλη είναι επίπεδη.

Αντίστροφα;;; Έστω ότι η $c(s)=(x(s),y(s),z(s))$ είναι επίπεδη, δηλαδή $\underbrace{AX(s)+By(s)+\Gamma Z(s)+\Delta=0}$



$Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ $\quad \Leftrightarrow \langle c(s),w\rangle+\Delta=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \dot c(s),w\rangle+\langle c(s),\cancel{\dot w}\rangle=0$

$\langle \vec t(s),w\rangle=0 \Rightarrow \langle \dot{\vec t}(s),w\rangle=0 \Rightarrow \langle \kappa(s)\vec n(s),w\rangle=0 \Rightarrow \overset{\text{παντού}>0}{\kappa(s)}\langle\vec n(s),w\rangle=0$

$\Rightarrow \langle \vec n(s),w\rangle=0$

$$\left.\begin{array}{l}\vec b=\vec t\times\vec n\\[2ex] \left.\begin{array}{l}\vec t\perp w\\ \vec n\perp w\end{array}\right\}\Rightarrow \vec t\times\vec n \,//\, w\end{array}\right\}\Rightarrow \vec b=\pm\frac{w}{\|w\|} \Rightarrow \vec b=\text{σταθερό} \Rightarrow \dot{\vec b}=0\Rightarrow\tau=0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $c: I\to\mathbb{R}^3$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου s και καμπυλότητα $\kappa(s)>0$, $\forall s\in I$. Τότε $\tau(s)=0$, $\forall s\in I \Leftrightarrow$ η c είναι επίπεδη.

Υπολογισμός της στρέψης

$\tau=\langle\dot{\vec n},\vec b\rangle$, $\quad \vec t=\dot c$, $\quad \vec n=\frac{\ddot c}{\kappa}$, $\quad \vec b=\vec t\times\vec n$, $\quad \ddot c=\dot{\vec t}=\kappa\vec n$

$$\dot{\vec n}=\left(\frac{\ddot c}{\kappa}\right)^{\cdot}=\frac{\dddot c}{\kappa}+\left(\frac{1}{\kappa}\right)^{\cdot}\ddot c=\frac{\dddot c}{\kappa}+\left(\frac{1}{\kappa}\right)^{\cdot}\kappa\vec n$$

$$\tau = \langle \dot{\vec{u}}, \vec{b} \rangle = \langle \frac{\dddot{c}}{\kappa}, \vec{b} \rangle + \left(\frac{1}{\kappa}\right)' \cancel{\kappa \langle \vec{u}, \vec{b} \rangle}$$

$$= \frac{1}{\kappa} \langle \dddot{c}, \vec{t} \times \vec{n} \rangle = \frac{1}{\kappa} \langle \dot{c} \times \frac{\ddot{c}}{\kappa}, \dddot{c} \rangle$$

$$= \frac{\langle \dot{c} \times \ddot{c} \times \dddot{c} \rangle}{\kappa^2}$$

$$\tau = \frac{[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}]}{\kappa^2}$$